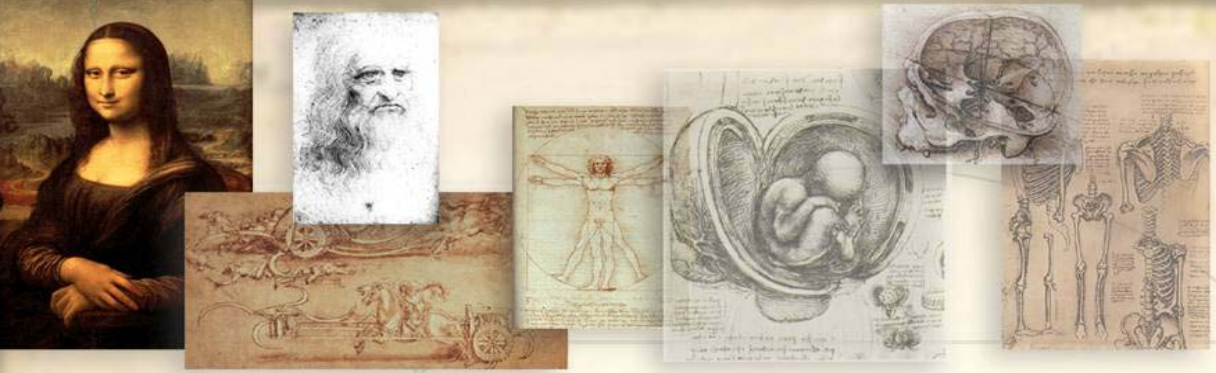
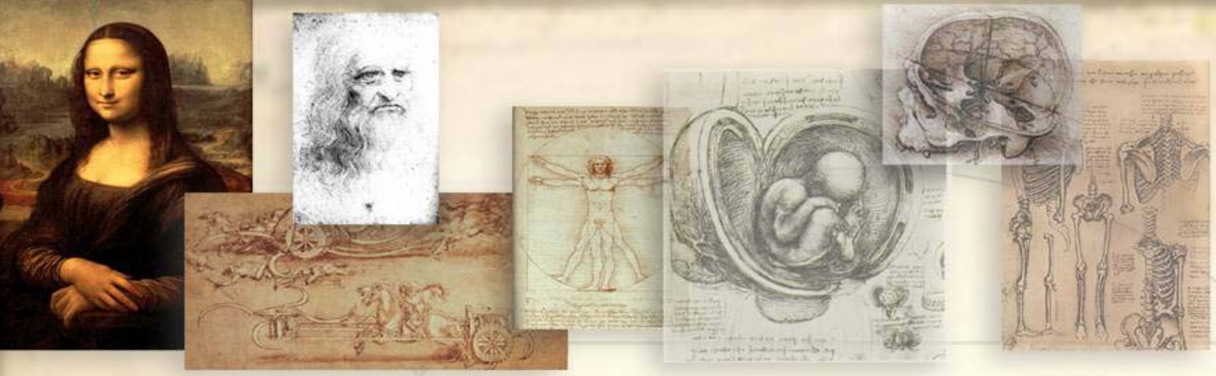


Aljabar Linear Elementer
MA1223
3 SKS



Jadwal Kuliah

Hari I	jam
Hari II	jam

Sistem Penilaian

UTS	40%
UAS	40%
Quis	20%

Silabus :

Bab I	Matriks dan Operasinya
Bab II	Determinan Matriks
Bab III	Sistem Persamaan Linear
Bab IV	Vektor di Bidang dan di Ruang
Bab V	Ruang Vektor
Bab VI	Ruang Hasil Kali Dalam
Bab VII	Transformasi Linear
Bab VIII	Ruang Eigen

REFERENSI :

- Anton H., Rorres, C., 1995, *Elementary Linear Algebra* : *Applications Version*, 6th edition, John Willey and Sons, New York
- Arifin, A., 2001, *Aljabar Linear*, edisi kedua, Penerbit ITB, Bandung
- Durbin, J. R., 1992, *Modern Algebra* : *An Introduction*, 3rd edition, John Willey and Sons, Singapore
- Kreyszig E., , 1993, *Advanced Enginereeng Mathematics*, 8th edition, John Willey & Sons, Toronto
- Leon, S. J., 2001, *Aljabar Linear dan Aplikasinya*, terjemahan Penerbit Erlangga, Jakarta

1. Matriks dan Operasinya

Sub Pokok Bahasan

- Matriks dan Jenisnya
- Operasi Matriks
- Operasi Baris Elementer
- Matriks Invers (Balikan)

Beberapa Aplikasi Matriks

- Representasi image (citra)
- C*hanel/Frequency assignment*
- *Operation Research*
- dan lain-lain.

1. Matriks dan Jenisnya

Notasi Matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Baris pertama

Unsur / entri /elemen ke-*mn*

(baris *m* kolom *n*)

Kolom kedua

Matriks A berukuran (Ordo) *mxn*

Misalkan A dan B adalah matriks berukuran sama

A dan B dikatakan sama (notasi $A = B$)

jika

$$a_{ij} = b_{ij}$$ **untuk setiap i dan j**

Jenis-jenis Matriks

- ***Matriks bujur sangkar (persegi)***

  ➔ Matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya adalah sama (n x n)

  Contoh :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Unsur diagonal

Matriks segi tiga

Ada dua jenis, yaitu matriks segitiga atas dan bawah.

- ***Matriks segi tiga atas***

  ➔ Matriks yang semua unsur dibawah unsur diagonal pada kolom yang bersesuaian adalah nol.

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- ***Matriks segi tiga bawah***

  ➔ Matriks yang semua unsur diatas unsur diagonal pada kolom yang bersesuaian adalah nol.

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- ***Matriks Diagonal***

  ➔ **Matriks bujur sangkar dimana setiap unsur yang bukan merupakan unsur diagonal adalah nol.**

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ***Matriks satuan* (*Identitas*)**

  ➔ **Matriks diagonal dimana setiap unsur diagonalnya adalah satu.**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Transpos Matriks**

  Matriks transpos diperoleh dengan menukar baris matriks menjadi kolom seletak, atau sebaliknya.

  Notasi A^t (hasil transpos matriks A)

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ maka } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

  Jika matriks $A = A^t$ maka matriks A dinamakan matriks Simetri.

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Operasi Matriks

Beberapa Operasi Matriks yang perlu diketahui :

1. Penjumlahan Matriks
2. Perkalian Matriks
   - Perkalian skalar dengan matriks
   - Perkalian matriks dengan matriks
3. Operasi Baris Elementer (OBE)

- **Penjumlahan Matriks**

  Syarat : Dua matriks berordo sama dapat dijumlahkan

Contoh

a.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

- **Perkalian Skalar dengan Matriks**

  Contoh :

$$k\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kp & kq \\ kr & ks \end{bmatrix}$$

- **Perkalian Matriks dengan Matriks**

  Misalkan A berordo *p*x*q* dan B berordo *m*x*n*

  Syarat : A X B → haruslah $q = m$

  hasil perkalian AB berordo *p*x*n*

  B X A → haruslah $n = p$

  hasil perkalian BA berordo *m*x*q*

  Contoh :

  Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2x3} \quad \textbf{dan} \quad B = \begin{bmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{bmatrix}_{3x2}$$

Maka hasil kali A dan B adalah :

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2x3} \begin{pmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} ap+bq+cr & as+bt+cu \\ dp+eq+fr & ds+et+fu \end{pmatrix}_{2x2}$$

Misalkan *A*, *B*, C adalah matriks berukuran sama dan α, β merupakan unsur bilangan Riil,

Maka operasi matriks memenuhi sifat berikut :

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
4. $(\alpha + \beta) (A) = \alpha A + \beta A$

Contoh :

Diketahui matriks :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan

a. $A\,A^t$

b. $A^t\,A$

Jawab :

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

maka

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 13 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

sedangkan

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Operasi Baris Elementer (OBE)**

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran Baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol (seperti butir 2) dengan baris yang lain.

Contoh : OBE 1

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \; b_1 \leftrightarrow b_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Baris pertama (b_1) ditukar dengan baris ke-2 (b_2)

OBE ke-2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tfrac{1}{4}\, b_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Perkalian Baris pertama (b_1) dengan bilangan ¼

OBE ke-3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \; -2b_1 + b_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Perkalian (–2) dengan b_1 lalu tambahkan pada baris ke-3 (b_3)

- Beberapa definisi yang perlu diketahui :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Baris pertama dan ke-2 dinamakan **baris tak nol**, karena pada kedua baris tersebut memuat unsur tak nol.
  - Bilangan 1 pada baris pertama dan bilangan 3 pada baris ke-2 dinamakan **unsur pertama tak nol** pada baris masing-masing.
  - Bilangan 1 (pada baris baris pertama kolom pertama) dinamakan **satu utama**.
  - Baris ke-3 dinamakan **baris nol**, karena setiap unsur pada baris ke-3 adalah nol.

Sifat matriks hasil OBE :

1. Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1 (dinamakan satu utama).
2. Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan.
3. Jika ada baris nol (baris yang semua unsurnya nol), maka ia diletakkan pada baris paling bawah.
4. Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah nol.

Matriks dinamakan esilon baris jika dipenuhi sifat 1, 2, dan 3 (Proses Eliminasi *Gauss*)

Matriks dinamakan esilon baris tereduksi jika dipenuhi semua sifat (Proses Eliminasi *Gauss-Jordan*)

Contoh :

Tentukan matriks esilon baris tereduksi dari

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$A \quad \sim \quad -2b_1+b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \quad b_2 \leftrightarrow b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \quad -2b_2 + b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-b_3 + b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b_2 + b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Perhatikan hasil OBE tadi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Setiap baris mempunyai satu utama.

Tidak setiap kolom memiliki satu utama, karena jumlah baris lebih sedikit dari jumlah kolom

(kolom 4 tidak mempunyai satu utama)

Invers Matriks

Misalkan A adalah matriks bujur sangkar.

B dinamakan invers dari A jika dipenuhi

$$A\,B = I \quad \text{dan} \quad B\,A = I$$

Sebaliknya, A juga dinamakan invers dari B.

Notasi $A = B^{-1}$

Cara menentukan invers suatu matriks A adalah

$$\left(A|I\right) \overset{\text{OBE}}{\sim} \left(I\,|\,A^{-1}\right)$$

Jika OBE dari A tidak dapat menghasilkan matriks identitas maka A dikatakan **tidak punya invers**

Contoh :

Tentukan matriks invers (jika ada) dari :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{b_1 \leftrightarrow b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -3b_1+b_2 \\ 2b_1+b_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{-}b_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{-}b_3 + b_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{-}b_2 + b_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Jadi Invers Matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Perhatikan bahwa :**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{dan } A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

maka

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berikut ini adalah sifat-sifat matriks invers :

i. $(A^{-1})^{-1} = A$

ii. Jika A, B dapat dibalik atau memiliki invers maka $(A \,.\, B)^{-1} = B^{-1} \,.\, A^{-1}$

iii. Misal $k \in Riil$ maka $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

iv. Akibat dari (ii) maka $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Latihan

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan (untuk no 1 – 5) matriks hasil operasi berikut ini :

1. AB
2. $3CA$
3. $(AB)C$
4. $(4B)C + 2C$

Untuk Soal no. 5 – 7, Diketahui :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan : $D + E2$ (dimana $E2 = EE$)
6. Tentukan matriks bentuk eselon baris tereduksi dari *A, B, C, D, dan E*
7. Tentukan matriks invers dari D dan E (jika ada)