

**Aljabar Linear Elementer**  
**MA1223**  
**3 SKS**

**Silabus :**

- Bab I Matriks dan Operasinya
- Bab II Determinan Matriks
- Bab III Sistem Persamaan Linear
- Bab IV Vektor di Bidang dan di Ruang
- Bab V Ruang Vektor
- Bab VI Ruang Hasil Kali Dalam
- Bab VII Transformasi Linear
- Bab VIII Ruang Eigen

05/04/2007 10:38      MA-1223 Aljabar Linear      1

---

---

---

---

---

---

---

---

**VEKTOR DI BIDANG DAN DI RUANG**

**Pokok Bahasan :**

1. Notasi dan Operasi Vektor
2. Perkalian titik dan Proyeksi Ortogonal
3. Perkalian silang dan Aplikasinya

**Beberapa Aplikasi :**

- Proses Grafika Komputer
- Kuantisasi pada proses kompresi
- Least Square pada Optimasi
- Dan lain-lain

05/04/2007 10:38      MA-1223 Aljabar Linear      2

---

---

---

---

---

---

---

---

**Notasi dan Operasi**

Vektor → besaran yang mempunyai arah

Notasi vektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k} = (c_1, c_2, c_3)$$

Notasi **panjang vektor**  $\|\vec{c}\| = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

adalah  $\|\vec{c}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$

**Vektor satuan** → Vektor dengan panjang atau norm sama dengan satu

05/04/2007 10:38      MA-1223 Aljabar Linear      3

---

---

---

---

---

---

---

---

**Operasi Vektor meliputi :**

1. Penjumlahan antar vektor (pada ruang yang sama)
2. Perkalian vektor
  - (a) dengan skalar
  - (b) dengan vektor lain
    - Hasil kali titik (*Dot Product*)
    - Hasil kali silang (*Cross Product*)

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 4

---

---

---

---

---

---

---

---

**Penjumlahan Vektor**

Misalkan  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  adalah vektor-vektor yang berada di ruang yang sama, maka vektor  $\vec{u} + \vec{v}$  didefinisikan

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 5

---

---

---

---

---

---

---

---

**Perkalian vektor dengan skalar**

Perkalian vektor  $\vec{u}$  dengan skalar  $k$ , ( $k\vec{u}$ ) didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya  $k$  kali panjang vektor  $\vec{u}$  dengan arah

Jika  $k > 0 \rightarrow$  searah dengan  $\vec{u}$   
 Jika  $k < 0 \rightarrow$  berlawanan arah dengan  $\vec{u}$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 6

---

---

---

---

---

---

---

---

**Scaling**

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 7

---

---

---

---

---

---

---

---

Secara analitis, kedua operasi pada vektor diatas dapat dijelaskan sebagai berikut :

Misalkan  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  dan  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  adalah vektor-vektor di ruang yang sama maka

1.  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2.  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
3.  $k \vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 8

---

---

---

---

---

---

---

---

**Perkalian antara dua vektor**

- Hasil kali titik (*dot product*)
- Hasil kali silang (*cross product*)

**Hasil kali titik (*dot product*)**

→ Hasil kali titik merupakan operasi antara dua buah vektor pada **ruang yang sama** yang menghasilkan skalar

**Hasil kali silang (*Cross product*)**

→ Hasil kali silang merupakan operasi antara dua buah vektor pada **ruang  $R^3$**  yang menghasilkan vektor

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 9

---

---

---

---

---

---

---

---

### Dot Product

Misalkan  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$   
adalah vektor pada ruang yang sama  
maka hasil kali titik antara dua vektor :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

dimana

$\|\vec{a}\|$  : panjang  $\vec{a}$

$\|\vec{b}\|$  : panjang  $\vec{b}$

$\alpha$  : sudut keduanya

05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

10

---

---

---

---

---

---

---

---

### Ilustrasi dot product vektor A dan B

$$A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos \alpha$$



05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

11

---

---

---

---

---

---

---

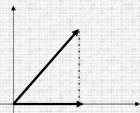
---

### Contoh 2 :

Tentukan hasil kali titik dari dua vektor

$$\vec{a} = 2\hat{i} \quad \text{dan} \quad \vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$

Jawab :



Karena  $\tan \alpha = 1$ , artinya  $\alpha = 45^\circ$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha \\ &= 2\sqrt{8} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

12

---

---

---

---

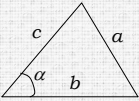
---

---

---

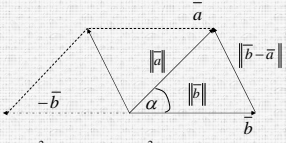
---

Ingat aturan cosinus



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Perhatikan



$$\| \vec{b} - \vec{a} \|^2 = \| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 - 2 \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos \alpha$$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 13

---

---

---

---

---

---

---

---

Selanjutnya dapat ditulis

$$\| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos \theta = \frac{1}{2} [ \| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 - \| \vec{b} - \vec{a} \|^2 ]$$

Ingat bahwa :

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos \alpha$
- $\| \vec{a} \|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$
- $\| \vec{b} \|^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$
- $\| \vec{b} - \vec{a} \|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2$   
 $= b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$   
 $- 2b_1a_1 - 2b_2a_2 - \dots - 2b_na_n$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 14

---

---

---

---

---

---

---

---

Perhatikan setiap sukunya, diperoleh hubungan :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

Tentukan kembali hasil kali titik dari dua vektor pada contoh sebelumnya

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$= 2(2) + 0(2)$$

$$= 4$$

Beberapa sifat hasilkali titik :

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$
- $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot k\vec{b}$ , dimana  $k \in \mathbb{R}$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 15

---

---

---

---

---

---

---

---

**Proyeksi Ortogonal**

terlihat bahwa  $\vec{c} = k \vec{b}$   $k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$

Karena  $\vec{a} = \vec{w} + \vec{c} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{w} + \vec{c}) \cdot \vec{b}$   
 $= \vec{w} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b}$   
 $= k \vec{b} \cdot \vec{b}$   
 $= k \|\vec{b}\|^2$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 16

---

---

---

---

---

---

---

---

Jadi,  
rumus proyeksi diperoleh :

$$\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

**Contoh 4 :**  
Tentukan proyeksi ortogonal  
vektor  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$   
terhadap vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 17

---

---

---

---

---

---

---

---

**Jawab :**

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{\vec{v}} \vec{u} &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{1^2 + 3^2 + (-4)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-2 + (-12) + (-12)}{26} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-26}{26} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 18

---

---

---

---

---

---

---

---

### Cross Product (hasilkali silang)

Hasil kali silang merupakan hasil kali antara dua vektor di Ruang ( $\mathbb{R}^3$ ) yang menghasilkan vektor yang tegak lurus terhadap kedua vektor yang dikalikan tersebut

$$\begin{aligned}\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & B_1 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \hat{k}\end{aligned}$$

05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

19

---

---

---

---

---

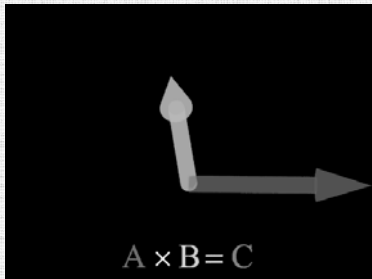
---

---

---

### Ilustrasi Cross Product (hasilkali silang)

$$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B}$$



05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

20

---

---

---

---

---

---

---

---

### Contoh :

Tentukan  $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$ ,

dimana  $\bar{u} = (1, 2, -2)$   $\bar{v} = (3, 0, 1)$

### Jawab :

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)) \hat{i} + (3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) \hat{j} + (1 \cdot 0 - 3 \cdot 2) \hat{k} \\ &= 2\hat{i} - 7\hat{j} - 6\hat{k}\end{aligned}$$

05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

21

---

---

---

---

---

---

---

---

Beberapa sifat Cross Product :

a.  $\vec{u} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$   
 b.  $\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$   
 c.  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 22

---

---

---

---

---

---

---

---

Dari sifat ke-3 diperoleh

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \cos^2 \alpha) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Jadi,  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 23

---

---

---

---

---

---

---

---

Perhatikan ilustrasi berikut :

Luas Jajaran Genjang =  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha$

Luas segitiga yang dibentuk oleh kedua vektor tersebut adalah

Luas segitiga =  $\frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

05/04/2007 10:38 MA-1223 Aljabar Linear 24

---

---

---

---

---

---

---

---



**Contoh :**

Diketahui titik-titik diruang ( di  $R^3$  ) adalah :

$$A = (1, -1, -2)$$

$$B = (4, 1, 0)$$

$$C = (2, 3, 3)$$

Dengan menggunakan hasil kali silang, tentukan luas segitiga ABC !

**Jawab :**

Tulis

$$\vec{AB} = B - A = (4, 1, 0) - (1, -1, -2)$$

$$= (3, 2, 2)$$

$$\vec{AC} = C - A = (2, 3, 3) - (1, -1, -2)$$

$$= (1, 4, 5)$$

05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

25

---

---

---

---

---

---

---

---

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\hat{i} - 13\hat{j} + 10\hat{k}$$

Luas segitiga ABC yang berimpit di A adalah

$$Luas = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 169 + 100}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{273}$$

05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

26

---

---

---

---

---

---

---

---

**Orientasi pada titik B**

$$\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b} = (1, -1, -2) - (4, 1, 0) = (-3, -2, -2)$$

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (2, 3, 3) - (4, 1, 0) = (-2, 2, 3)$$

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 13\hat{k} - 10\hat{j}$$

Sehingga luas segitiga ABC yang berimpit di B adalah :

$$= \frac{1}{2} \|\vec{BA} \times \vec{BC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 169 + 100}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{273}$$

05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

27

---

---

---

---

---

---

---

---

**Latihan Bab 4**

1. Tentukan cos sudut yang terbentuk oleh pasangan vektor berikut :
  - a.  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  dan  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$
  - b.  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$  dan  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
2. Tentukan proyeksi ortogonal vektor terhadap vektor dan tentukan panjang vektor proyeksi tersebut:
  - a.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  dan  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - b.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  dan  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

28

---

---

---

---

---

---

---

---

3. Tentukan dua buah vektor satuan yang tegak lurus terhadap  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
4. Tentukan vektor yang tegak lurus terhadap vektor  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  dan  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
5. Tentukan luas segitiga yang mempunyai titik sudut P (2, 0, -3), Q (1, 4, 5), dan R (7, 2, 9)

05/04/2007 10:38

MA-1223 Aljabar Linear

29

---

---

---

---

---

---

---

---